A theorem of Schmieder-Shiba on compact continuations of open Riemann surfaces (Hyperbolic Spaces and Discrete Groups)

増本, 誠

数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 10-18

A theorem of Schmieder-Shiba on compact continuations of open Riemann surfaces

山口大学理学部　増本 誠 (Makoto Masumoto)
Department of Mathematics,
Yamaguchi University

1. はじめに

R を有限種数 g の開 Riemann 面とする. よく知られているように, R は同種数のある閉 Riemann 面 R' に等角に埋め込まれる. $g=0$ の場合, この事実は, Koebe の一般一意化定理そのものである. Bochner [3, Satz V] は, この Koebe の定理を応用して, $g>0$ の場合の証明を与えた.

では, 与えられた R を等角に埋め込ませるような (同種数の) 閉 Riemann 面 R' はどのような面であろうか. $g=0$ のときは, 「種数 0 の閉 Riemann 面は Riemann 球面に限る」という事実により, そもそも問題にならない. $g=1$ のとき, Heins [4, Theorem 2] は, 「そのような R' の集合は, 種数 1 のモデュライ空間において相対コンパクトな集合をなす」ことを示した. 一般の種数の場合, 及川 [13, Theorem on p.35] は, Teichmüller 空間の枠組みの中で問題を設定し, 「このような R' の全体は, 種数 g の Teichmüller 空間において連結なコンパクト集合をなす」ことを証明した. また, [14, Theorem 2] において, この集合が 1 点に退化するための必要十分条件も与えている. Ioffe [5], [6] は, R が位相的に有限な場合に限定し, やはり, Teichmüller 空間論の枠組みの中で, R' への極値擬等角写像を考察した. 極値擬等角写像が等角になる R' 全体が, 我々の知りたい集合である. そして, そのような R' 全体の集合の (Teichmüller 空間における) 内部や境界を調べた. (Ioffe は, より一般に, 位相的に有限な任意の Riemann 面 R' (必ずしも種数は g とは限らない) への埋め込みを扱っている.) Timmann [22, Satz 1] は, R が境界付きコンパクト Riemann 面の場合, R をその境界まで含めて等角に埋め込ませるような閉 Riemann 面 R' の集合は, 種数 g の Teichmüller 空間内において有界な領域 (すなわち, 連結な開集合) をなすことを示した.

1980 年代になって, 柴が精力的な研究を始める. まず, [17], [21] において流体力学的接続と名付けられた埋め込みを導入した. 次に, [18], [19], [20] において Riemann の周期行列

を通して, 与えられた開 Riemann 面を等角に埋め込ませる (同種数の) 閉 Riemann 面の集合を調べた. すなわち, Torelli 空間の枠組みで等角的埋め込みの空間を考察したわけである. これらの研究の中で, 特に, 流体力学的接続が極値的な埋め込みであることを示した (cf. [18, Theorem 5], [19, Theorem 4], [20, Theorem 7]). このような極値的埋め込みの発見が, これまでの研究と一線を画しているように思われる. この小文では, 与えられた開 Riemann 面を等角に埋め込ませる閉 Riemann 面全体のなす集合の形状に関する Schmieder-柴の定理 [16, Theorem 3], [11, Theorem 10.1] について解説する.

2. Schmieder-柴の定理

与えられた開 Riemann 面を等角に埋め込ませる同種数の閉 Riemann 面の空間について調べるのが目的である. より数量的な結果を得るため, あらかじめ Riemann 面上に単純閉曲線の列を指定しておき, これらの列が閉 Riemann 面上にも指定しておいた列に写されるような等角的埋め込みを考察するのが好都合である. 正確な定義から始めよう.

R を有限正種数 g の Riemann 面とする; R は閉でも開でもよい. R 上の単純閉曲線の列 $\chi = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g\}$ で

$$a_j \times b_k = \delta_{jk}, \quad a_j \times a_k = b_j \times b_k = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, g)$$

を満たすものを考える; ここで, $c_1 \times c_2$ は, 閉曲線 c_1 と c_2 の (幾何学的) 交点数 (cf. 楠 [7, §4.3], 中井 [12, §15]) を表し, δ_{jk} は Kronecker のデルタである. このような R と χ の組 (R, χ) を種数 g の印付き **Riemann** 面と呼ぶ. R が閉であるか開であるかに従って, (R, χ) は印付き閉 Riemann 面である, あるいは, 印付き開 Riemann 面であるという. Teichmüller 空間論で定義される印付き Riemann 面との類似性は明らかであるが, R が開である場合, その境界成分に対応する閉曲線は考慮されていないことに注意しよう. χ は, R の (特異) 弱ホモロジー群 $H_1^w(R)$ の標準基をなしている. ここで, $H_1^w(R)$ は, R の特異 1-サイクル全体のなす可換群 $Z_1(R)$ を分離サイクルの全体 $D_1(R)$ で割って得られる群である: $H_1^w(R) = Z_1(R)/D_1(R)$. (分離サイクルの定義は, Ahlfors-Sario [2, I.35A], 楠 [7, p.183], 中井 [12, p.119] を参照せよ.) 直観的には, 次のように理解すればよい. まず, R を同種数の閉 Riemann 面 R' の中へ位相的に埋め込んでおく. $\iota : R \to R'$ を中への同相写像とする. このとき, R の閉曲線 c_1 と c_2 が互いに弱ホモローグであるための必要十分条件は, それらの像 $\iota(c_1)$ と $\iota(c_2)$ が R' において通常の意味でホモローグであることである. 一般に, $H^1(R)$ は階数 $2g$ の自由可換群である. R が閉のとき, $H_1^w(R)$ は通常の (特異) ホモロジー群 $H_1(R)$ に一致している.

$(R_1, \chi_1), (R_2, \chi_2)$ を種数 g の印付き Riemann 面とし, $\chi_k = \{a_{kj}, b_{kj}\}_{j=1}^g$ $(k = 1, 2)$ とする. $f : R_1 \to R_2$ が正則で, 各 j に対し $f(a_{1j}), f(b_{1j})$ がそれぞれ a_{2j}, b_{2j} と弱ホモローグであるとき, f は (R_1, χ_1) から (R_2, χ_2) の中への正則写像であるといい, $f : (R_1, \chi_1) \to (R_2, \chi_2)$ という記号を用いる. さらに, f が単射ならば, $f : (R_1, \chi_1) \to (R_2, \chi_2)$ は中への**等角写像**である, または, **等角的埋め込み**であるという. また, f が全単射ならば, $f : (R_1, \chi_1) \to (R_2, \chi_2)$ は上への等角写像であるという. (R_1, χ_1) から (R_2, χ_2) の上への等角写像が存在するとき, (R_1, χ_1) と (R_2, χ_2) は互いに**等角同値**であるという.

さて, (R,χ) を種数 g の印付き開 Riemann 面とする. (R,χ) からの等角的埋め込みが存在するような種数 g の印付き閉 Riemann 面の (等角同値類の) 全体を $C(R,\chi)$ と表す. 柴は, 一連の研究において, Riemann の周期行列を通して空間 $C(R,\chi)$ を調べた.

一般に, (R',χ') を種数 g の印付き閉 Riemann 面とし, $\chi'=\{a'_j,b'_j\}_{j=1}^g$ とする. R' 上には

$$\int_{a'_j}\varphi'_k=\delta_{jk}\qquad(j,k=1,\dots,g)$$

を満たす正則微分 $\varphi'_1,\dots,\varphi'_g$ が一意的に存在する. このとき, φ'_k を (R',χ') の第 k 正規微分と呼び, また,

$$\pi_{jk}(R',\chi'):=\int_{b'_j}\varphi'_k$$

を成分とする g 次正方行列 $\Pi[R',\chi']=(\pi_{jk}(R',\chi'))$ を, (R',χ') の (正規化された) 周期行列という. この行列は, Siegel の上半空間に属す. すなわち, $\Pi[R',\chi']$ は対称行列で, その虚部 $\operatorname{Im}\Pi[R',\chi']$ は正定値である. 特に, その対角成分 $\pi_{kk}(R',\chi')$ は上半平面 $\mathbb{H}$ の点である. 標題の **Schmieder-柴の定理**とは, 集合

$$M_k(R,\chi)=\{\pi_{kk}(R',\chi')\mid(R',\chi')\in C(R,\chi)\}$$

に関する次の定理である.

定理 1 (Schmieder-Shiba [16, Theorem 3], Masumoto [11, Theorem 10.1]). $M_k(R,\chi)$ は, $\mathbb{H}$ 内の閉円板または一点である.

注意. $M_k(R,\chi)$ が一点に退化するための必要十分条件は, $R\in O_{AD}$ であること, すなわち, Dirichlet 積分有限な R 上の正則関数は定数関数に限ることである. $M_1(R,\chi),\dots,M_g(R,\chi)$ のうち, 一つでも一点に退化するものがあれば, 他のどれも一点に退化している (柴 [19, Theorem 5]). 及川 [14, Theorem 1] は, 有限正種数の開 Riemann 面 R を等角に埋め込ませる同種数の閉 Riemann 面がただ一つしか存在しないための必要十分条件は, $R\in O_{AD}$ であることを示した. 上記の柴の定理は, この及川の定理の精密化と言えよう.

及川の定理 [13, Theorem on p.35] より, $M_k(R,\chi)$ が $\mathbb{H}$ の連結なコンパクト部分集合であることはすぐに分かる. 柴 [20, Theorems 3 and 4] は, より詳しく, $\mathbb{H}$ 内の閉円板 (または一点) $\Delta_k(R,\chi)$ で

$$\partial\Delta_k(R,\chi)\subset M_k(R,\chi)\subset\Delta_k(R,\chi)\tag{1}$$

を満たすものが存在することを示した. 定理 1 は, 実際には, $M_k(R,\chi)=\Delta_k(R,\chi)$ が成立することを示している. Schmieder-柴 [16] は, R が位相的に有限である, すなわち, R の境界成分が有限個しかない, という仮定の下で定理 1 を証明した. 一般の場合の証明は, [11] で与えられた. 次節以降で, これらの証明のアイディアを解説する.

注意. 境界 $\partial\Delta_k(R,\chi)$ は (R,χ) の流体力学的接続から生じる. これが, 第 1 節において触れた流体力学的接続の極値性である. 流体力学的接続の定義は原論文に譲り, ここでは, その際だった性

質を述べることにしよう. 以下, k を一つ固定する. 円 $\partial\Delta_k(R,\chi)$ の中心を π_k^*, 半径を ρ_k とする. $f:(R,\chi)\to(R',\chi')$ を種数 g の印付き閉 Riemann 面 (R',χ') の中への等角的埋め込みとする. 周期行列の第 k 対角成分 $\pi_{kk}(R',\chi')$ が円 $\partial\Delta_k(R,\chi)$ 上の一点 $\pi_k^*-i\rho_k e^{\pi i}$ に一致していると仮定する. このとき, $R'\setminus f(R)$ の面積 (2 次元 Lebesgue 測度) は 0 であり, その各成分は, それに沿って $\mathrm{Im}(e^{-\pi it/2}\varphi_k')=0$ である解析的曲線 (と φ_k' の零点の和) である. ここで, φ_k' は (R',χ') の第 k 正規微分である.

3. Schmieder-柴の方法

Schmieder-柴 [16] は, 定理 1 を次のように証明した. (R,χ) を種数 g の印付き開 Riemann 面とし, R は有限個の境界成分を持つと仮定する. $\chi=\{a_j,b_j\}_{j=1}^g$ とするとき, $a_1,\ldots,b_g$ はただ 1 点のみを共有し, どの二つもこの 1 点のみを共有していると仮定してよい. このとき, $R^*:=R\setminus\bigcup_{j=1}^g(a_j\cup b_j)$ は種数が 0 の領域 (平面型領域) となるので, Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の水平截線領域 S の上に等角に写される. S は無限遠点 ∞ を含み, $\hat{\mathbb{C}}\setminus S$ は実軸に平行な有限個の線分 $l_0,l_1,\ldots,l_n$ と有限個の点から成り立っている. これらの線分のうち, 一つは $\bigcup_{j=1}^g(a_j\cup b_j)$ に対応し, 残りは R の境界成分に対応している. 必要ならば番号を付け替えて, $l_1,\ldots,l_n$ が R の境界成分に対応しているとしてよい. これらは, 実軸に平行な線分なので,

$$l_\nu=\{w\in\mathbb{C}\mid u_\nu\le\mathrm{Re}\,w\le u_\nu',\mathrm{Im}\,w=v_\nu\}\qquad(\nu=1,\ldots,n)$$

の形に表される. 各 $t\in[0,1]$ に対し, S に

$$\bigcup_{\nu=1}^n\{u_\nu+s(u_\nu'-u_\nu)+iv_\nu\mid 0\le s<t\}$$

を付け加えて得られる領域を S_t とする. R^* と S は互いに等角同値なので, これらを同一視すると, R^* は S_t の部分領域である. S から S_t を作るとき, $\bigcup_{j=1}^g(a_j\cup b_j)$ に対応する線分 l_0 には手を加えなかったので, $R^*(=S)$ を S_t に置き換えることにより, R を含む新しい Riemann 面 R_t を得る. 直観的には, R の境界成分を一部縫い合わせたものが R_t である. 明らかに, $R=R_0\subset R_t$ が成立しており, χ は自然に $H_1^w(R_t)$ の標準基 χ_t を定める. すなわち, (R_t,χ_t) は種数 g の印付き開 Riemann 面で, (R,χ) は (R_t,χ_t) に等角に埋め込まれている. このとき, 次の補題が成立する:

補題 1 ([16, Theorems 2 and 2′]). 各 k に対し, 円 $\Delta_k(R_t,\chi_t)$ は t について連続的に動く.

$R_0=R$ であることと, R_1 はある閉 Riemann 面 R' から高々有限個の点を除いたものと等角同値であることに注意すると,

$$\Delta_k(R_0,\chi_0)=\Delta_k(R,\chi),\qquad\Delta_k(R_1,\chi_1)=\{\pi_{kk}(R',\chi')\}\tag{2}$$

であることが分かる. ここで, χ' は χ_1 から自然に誘導される R' の標準ホモロジー基である. また, $0\le s\le t\le1$ ならば, (R_s,χ_s) は (R_t,χ_t) に等角に埋め込まれるので,

$C(R_t,\chi_t)\subset C(R_s,\chi_s)$ が成り立つ. ゆえに, 集合 $M_k(R_t,\chi_t)$ は, t が増加するに従って, 単調に減少する:

$$(3) \qquad 0\le s\le t\le 1 \quad\Rightarrow\quad M_k(R_s,\chi_s)\supset M_k(R_t,\chi_t).$$

よって, (1) より

$$\Delta_k(R_s,\chi_s)\supset M_k(R_s,\chi_s)\supset M_k(R_t,\chi_t)\supset \partial\Delta_k(R_t,\chi_t)$$

となるが, $\Delta_k(R_t,\chi_t)$ も $\Delta_k(R_s,\chi_s)$ も閉円板なので, 結局, $\Delta_k(R_t,\chi_t)$ も, t が増加するに従って, 単調に減少している:

$$(4) \qquad 0\le s\le t\le 1 \quad\Rightarrow\quad \Delta_k(R_s,\chi_s)\supset \Delta_k(R_t,\chi_t)$$

補題 1 より $\Delta_k(R_t,\chi_t)$ は t について連続的に変化するので, (2) と (4) より

$$\bigcup_{0\le t\le 1}\partial\Delta_k(R_t,\chi_t)=\Delta_k(R,\chi)$$

の成立することが分かる. (1) と (3) から

$$\partial\Delta_k(R_t,\chi_t)\subset M_k(R_t,\chi_t)\subset M_k(R_0,\chi_0)=M_k(R,\chi)$$

なので, $\Delta_k(R,\chi)\subset M_k(R,\chi)$ を得る. これと (1) を併せて $M_k(R,\chi)=\Delta_k(R,\chi)$ を知る.

4. 極値的長さ

Schmieder-柴 [16] では, 補題 1 のような印付き Riemann 面の族 $\{(R_t,\chi_t)\}_{0\le t\le 1}$ を得るために, R の境界を適当に縫い合わせていった. これは, R が有限個の境界成分を持つときには自然な方法であるが, 一般の場合には適用できず, 所要の性質を有する族を見出すのは容易ではない. [11] では, この困難を, 極値的長さと Peano 曲線の活用により克服した. この節では, まず, 極値的長さによる円 $\Delta_k(R,\chi)$ の特徴付けについて述べる.

Riemann 面 R 上の 1 次密度とは, R の各局所座標 z に非負値 Borel 関数 ρ を対応させるもので, 表現 $\rho(z)|dz|$ が局所座標の取り替えに対して不変となるようなものである. Γ を R の曲線族とする. 曲線族と書いたが, Γ の元として, 曲線の可算個の和も許している. Γ の極値的長さ $\lambda(\Gamma)$ を,

$$\lambda(\Gamma)=\sup_\rho\frac{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma\rho(z)\,|dz|\right)^2}{\iint_R\rho(z)^2\,dx\,dy}$$

で定義する. ここで, 上限は $0<\iint_R\rho(z)^2\,dx\,dy<+\infty$ を満たす R 上の 1 次密度 $\rho(z)|dz|$ 全体に関してとる. 極値的長さは等角不変量である. すなわち, f を R から別の Riemann 面 R' を中への等角写像とすると, $\lambda(f(\Gamma))=\lambda(\Gamma)$ が成立する. 極値的長さの基本的性質については, Ahlfors [1, I.D], 楠 [7, §8.2], Lehto-Virtanen [8, III.4] を参照せよ.

さて, R の弱ホモロジー群 $H_1^w(R)$ の元 c は, R の閉曲線の有限和の族である. 従って, その極値的長さ $\lambda(c)$ が定義される. このとき, Rodin の定理 [15] を応用して, 次の命題が得られる.

命題 1 ([11, p.21]). $c_1, \ldots, c_n \in H_1^w(R)$ に対し, n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で

$$|\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j| = \sqrt{\lambda(c_i - c_j)} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n)$$

を満たすものが存在する. ここで, $c_0 = 0$ である.

集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ の凸包の $\underline{n\text{ 次元}}$ 体積を $V(c_1, \ldots, c_n)$ と表す. この体積は, 一般には 0 にもなり得るが, $c_1, \ldots, c_n$ が一次独立ならば, $V(c_1, \ldots, c_n) > 0$ であることが証明される. 詳しくは, [11, Corollary 4.1] を見よ.

注意. 命題 1 の証明は, [11, Proposition 2.1] と同様になされる. ただし, [11] の Propositions 2.1, 2.3 の主張は, 勇み足もあって, 正しくない部分もあるので注意が必要である. これらの主張の $H_1(R)$ を $H_1^w(R)$ に置き換えたものは正しい.

さて, (1) 式で定まる円 $\Delta_k(R, \chi)$ は, 弱ホモロジー類の極値的長さを使って, 次のように記述される:

定理 2 ([11, Theorem 7.1]). R を種数 g の開 Riemann 面とし, $\chi = \{a_j, b_j\}_{j=1}^g$ を $H_1^w(R)$ の標準基とする. 各 $k = 1, \ldots, g$ に対し,

$$\xi_k = \frac{g^2 V(a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2}{V(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2},$$

$$\eta_k = \frac{g^2 V(b_k, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2}{V(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2},$$

$$\zeta_k = \frac{g^2 V(a_k - b_k, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2}{V(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g)^2}$$

とし,

$$U_k = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{\xi_k} \right\},$$

$$V_k = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{\eta_k} \right\},$$

$$W_k = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} \geq \frac{1}{\zeta_k} \right\}$$

とおく. ただし, $g = 1$ のときは, $V(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_g) = 1$ とする.

(i) $\partial U_k \cap \partial V_k \cap \partial W_k \neq \varnothing$ ならば, $\Delta_k(R, \chi)$ は一点からなり, $\partial U_k \cap \partial V_k \cap \partial W_k$ に一致する.

(ii) $\partial U_k \cap \partial V_k \cap \partial W_k = \varnothing$ ならば, $U_k \cap V_k \cap W_k$ は (退化しない) 円弧三角形で, $\Delta_k(R, \chi)$ はそれの内接円である.

境界 ∂U_k は, 実軸に平行な直線である. ∂V_k は, 原点で実軸に接する円で, その直径は η_k に等しい. 同様に, ∂W_k は, 点 1 で実軸に接する直径 ζ_k の円である. これらの直線または円は, ξ_k, η_k, ζ_k とともに連続的に動くので, 内接円 $\Delta_k(R,\chi)$ も (1 点に退化する場合も含めて) これらの値に関して連続的に動く. このことは, 円 $\Delta_k(R,\chi)$ の中心と半径を, ξ_k, η_k, ζ_k で具体的に表示することによっても確かめられる. その表示式については, [10, Lemma 1] を参照せよ.

5. Peano 曲線の応用

この節では, 種数 g の任意の印付き開 Riemann 面 (R,χ) に対して, 定理 1 を証明する. R の境界についてはいかなる仮定もおかない; 境界成分は非可算個あるかも知れない.

定理 2 の重要な点は, 円 $\Delta_k(R,\chi)$ が, 極値的長さの有理式で表現されたことである. 極値的長さは, その定義から容易に想像できるように, 面を少々変形してもその値はあまり変化しない. 弱ホモロジー類の極値的長さについては, この事実は次の補題のように定式化される. 一般に, $r>0$ に対し, 原点中心, 半径 r の開円板を $\mathbb{D}_r$, その閉包を $\bar{\mathbb{D}}_r$ と表す. そして, $\mathbb{D}=\mathbb{D}_1$, $\bar{\mathbb{D}}=\bar{\mathbb{D}}_1$ とおく.

補題 2 ([11, Lemma 9.2]). R は正種数 g の開 Riemann 面で, 同じ種数 g の閉 Riemann 面 R' の部分領域にもなっているとする. ζ は, $\bar{\mathbb{D}}$ から R' の中への同相写像で, $\mathbb{D}$ 上では正則であるとし, R' の開集合 $R\setminus\zeta(\bar{\mathbb{D}})$ は種数 g の連結成分を持つと仮定する. 各 $\varepsilon\in(0,1)$ に対し, $R\setminus\zeta(\bar{\mathbb{D}}_\varepsilon)$ の種数 g の連結成分を S_ε と表す. このとき, $c\in H_1^w(R)\setminus\{0\}$ とし, 包含写像 $S_\varepsilon\to R$ による c の引き戻しを $c_\varepsilon(\in H_1^w(S_\varepsilon))$ とすると,

$$\frac{1}{\lambda(c_\varepsilon)}\leq\frac{1}{\lambda(c)}\leq\frac{1}{\lambda(c_\varepsilon)}-\frac{2\pi}{\log\varepsilon}$$

が成立する.

注意. $R\setminus\zeta(\bar{\mathbb{D}})$ は種数 g の連結成分を持つことを仮定したが, この仮定はそれほど本質的ではない. $r>0$ を十分小さく取れば, $R\setminus\zeta(\bar{\mathbb{D}}_r)$ は必ず種数 g の連結成分を持つからである.

さて, (R,χ) を種数 g の印付き開 Riemann 面とする. R は同種数 g の閉 Riemann 面 R' の部分領域と仮定してよい. $E'=R'\setminus R$ とおき, $\gamma([0,1])=R'$ と $\gamma(0)\in E'$ を満たす連続写像 (Peano 曲線) $\gamma:[0,1]\to R'$ をとる. 各 $t\in[0,1]$ に対し, $R'_t=R'\setminus\{\gamma([0,1-t])\cap E'\}$ とおくと,

$$R=R'\setminus E'\subset R'_t\subset R'$$

かつ R と R' の種数はいずれも g なので, R'_t の連結成分 R_t で種数が g に等しいものがただ一つ存在する. R_t は t とともに単調に増大する Riemann 面の族で, $R_0=R$ かつ $R_1=R'\setminus\{\gamma(0)\}$ となっている. $H_1^w(R_t)$ の標準基 $\chi_t=\{a_{tj},b_{tj}\}_{j=1}^g$ を, R から R_t への包含写像が (R,χ) から (R_t,χ_t) の中への等角写像となるように選ぶことができる. 補題 2 より $\lambda(a_{tj})$, $\lambda(b_{tj})$ は t の連続写像であることが簡単に示されるので, 定理 2 より円 $\Delta_k(R_t,\chi_t)$

が t とともに連続的に変化することが分かる. すなわち, $\{(R_t,\chi_t)\}$ は, 補題 1 の結論を満たす印付き開 Riemann 面の族である. 後は, 第 3 節と同様に議論すればよい.

注意. このような Peano 曲線の活用法は, [9, Proof of Theorem 5] にさかのぼることができる.

写像 $\pi_{11}\times\cdots\times\pi_{gg}: C(R,\chi)\ni(R',\chi')\mapsto(\pi_{11}(R',\chi'),\ldots,\pi_{gg}(R',\chi'))\in\mathbb{H}^g$ の像は, 一般には, 多重円板 $M_1(R,\chi)\times\cdots\times M_g(R,\chi)$ とは異なる. 定理 1 は, 像 $(\pi_{11}\times\cdots\times\pi_{gg})(C(R,\chi))$ の各座標への射影が閉円板であることを主張しているに過ぎない. この像が $\mathbb{H}^g$ のどのような集合であるか調べる問題は大変興味深い.

References

[1] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, Princeton, 1966. (Reprint: Wadsworth, Belmont, 1987.)

[2] L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann Surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

[3] S. Bochner, Fortsetzung Riemannscher Flächen, Math. Ann. **98** (1927), 406–421.

[4] M. Heins, A problem concerning the continuation of Riemann surfaces, Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, ed. by L. V. Ahlfors et al., Ann. of Math. Studies **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1953, pp.55–62.

[5] M. S. Ioffe, Conformal and quasi-conformal imbedding of one finite Riemann surface into another, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 75–78.

[6] M. S. Ioffe, On a problem of the variational calculus in the large for conformal and quasi-conformal imbeddings of one finite Riemann surface in another, Soviet Math. Dokl. bf 14 (1973), 1576–1579.

[7] 楠 幸男, 函数論 —リーマン面と等角写像—, 朝倉書店, 1973.

[8] O. Lehto and K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[9] M. Masumoto, On the moduli set of continuations of an open Riemann surface of genus one, J. Anal. Math. **63** (1994), 287–301.

[10] M. Masumoto, Conformal mappings of a once-holed torus, J. Anal. Math. **66** (1995), 117–136.

[11] M. Masumoto, Extremal lengths of homology classes on Riemann surfaces, J. Reine Angew. Math. **508** (1999), 17–45.

[12] 中井 三留, リーマン面の理論, 森北出版, 1980.

[13] K. Oikawa, On the prolongation of an open Riemann surface of finite genus, Kodai Math. Sem. Rep. **9** (1957), 34–41.

[14] K. Oikawa, On the uniqueness of the prolongation of an open Riemann surface of finite genus, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 785–787.

[15] B. Rodin, Extremal length of weak homology classes on Riemann surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 369–372.

[16] G. Schmieder and M. Shiba, One-parameter variations of the ideal boundary and compact continuations of a Riemann surface, Analysis **18** (1998), 125–130.

[17] M. Shiba, The Riemann-Hurwitz relation, parallel slit covering map, and continuation of an open Riemann surface of finite genus, Hiroshima Math. J. **14** (1984), 371–399.

[18] M. Shiba, The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 299–311.

[19] M. Shiba, The period matrices of compact continuations of an open Riemann surface of finite genus, Holomorphic Functions and Moduli I ed. by D. Drasin et al., Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg (1988), 237–246.

[20] M. Shiba, Conformal embeddings of an open Riemann surface into closed surfaces of the same genus, in "Analytic Function Theory of One Complex Variable" ed. by Y. Komatu et al., Longman Scientific & Technical, 1989, pp.287–298.

[21] M. Shiba and K. Shibata, Hydrodynamic continuations of an open Riemann surface of finite genus, Complex Var. Th. Appl. **8** (1987), 205–211.

[22] S. Timmann, Einbettungen endlicher Riemannscher Flaächen, Math. Ann. **217** (1975), 81–85.